## 第 3 节 $a_n$ 与 $S_n$ 混搭的处理（★★★）

### 内容提要

设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，则 $a_n$ 与 $S_n$ 之间的关系为 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$，运用这一关系可以解决很多数列问题.

1．已知 $S_n$ 求 $a_n$：若已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$，则可直接由上述关系求得 $a_n$.

2．$a_n$ 与 $S_n$ 相互转化：题干给出一个 $a_n$ 与 $S_n$ 的关系，我们可利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$ 来消去 $a_n$ 或 $S_n$，具体消谁由问题的需要来决定. 通常情况下，若让求的是 $a_n$，则消 $S_n$；若让求的是 $S_n$，则消 $a_n$.

3．前 $n$ 项积：涉及前 $n$ 项积的问题的处理方法与前 $n$ 项和的类似. 设所有项非零的数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项积为 $P_n$，我们可利用 $a_n=\dfrac{P_n}{P_{n-1}}(n\geq 2)$ 来消去 $a_n$ 或 $P_n$.

### 典型例题

**类型Ⅰ：已知 $S_n$ 求 $a_n$**

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

**解：**（已知 $S_n$ 求 $a_n$，直接代关系式 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$ 计算即可，注意务必分 $n=1$ 和 $n\geq 2$ 分别计算）

《一数•高考数学核心方法》

因为 $S_n=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}$，所以 $a_1=S_1=\dfrac{3^2-3}{2}=3$；

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}-\dfrac{3^n-3}{2}=\dfrac{3^{n+1}-3^n}{2}=\dfrac{3\times 3^n-3^n}{2}=3^n$；

又 $a_1=3$ 也满足上式，所以 $a_n=3^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

**【反思】**已知 $S_n$ 求 $a_n$，直接代关系式 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$ 计算即可.

**类型Ⅱ：$a_n$ 与 $S_n$ 的相互转化**

【例 2】（2022·全国甲卷节选）记 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，已知 $\dfrac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，证明：$\{a_n\}$ 是等差数列.

**证明：**（要证的是 $\{a_n\}$ 为等差数列，故考虑消 $S_n$，可把 $S_n$ 的系数化为常数，再退 $n$ 相减）

因为 $\dfrac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，所以 $2S_n+n^2=2na_n+n$ ①，故当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+n-1$ ②，

（两式相减即可把 $2S_n-2S_{n-1}$ 化为 $2a_n$，从而消去 $S_n$）

由① − ②可得 $2S_n+n^2-2S_{n-1}-(n-1)^2=2na_n+n-2(n-1)a_{n-1}-(n-1)$，

所以 $2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$，整理得：$(n-1)a_n-(n-1)a_{n-1}=n-1$ ③，

因为 $n\ge 2$，所以 $n-1\ge 1$，故在③中约去 $n-1$ 可得 $a_n-a_{n-1}=1$，所以 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列.

【反思】当 $S_n$ 与 $a_n$ 混搭在一个关系式中时，若要证的是与 $a_n$ 有关的结论，则考虑将关系式中 $S_n$ 的系数化为常数，退 $n$ 相减，由 $S_n-S_{n-1}=a_n(n\ge 2)$ 消去 $S_n$.

【例 3】设 $S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，且 $a_1=-1$，$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则 $S_n=$______.

**解析：**要求的是 $S_n$，故把条件中的 $a_{n+1}$ 换成 $S_{n+1}-S_n$，因为 $a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，所以 $S_{n+1}-S_n=S_nS_{n+1}$ ①，

为了把递推式中 $S_nS_{n+1}$ 分开，两端同除以 $S_nS_{n+1}$，严谨考虑，先判断 $\{S_n\}$ 是否各项均不为 0，

由①可得 $S_{n+1}(1-S_n)=S_n$，所以 $S_2(1-S_1)=S_1$，又 $S_1=a_1=-1<0$，所以 $S_2=\dfrac{S_1}{1-S_1}<0$，

同理，由 $S_2<0$ 得 $S_3=\dfrac{S_2}{1-S_2}<0$，由 $S_3<0$ 得 $S_4=\dfrac{S_3}{1-S_3}<0$，…，所以 $\{S_n\}$ 所有项均为负数，

在 $S_{n+1}-S_n=S_nS_{n+1}$ 两端同除以 $S_nS_{n+1}$ 得 $\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}=1$，所以 $\dfrac{1}{S_{n+1}}-\dfrac{1}{S_n}=-1$，

故 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 是公差为 $-1$ 的等差数列，又 $\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{1}{a_1}=-1$，所以 $\dfrac{1}{S_n}=-1+(n-1)\cdot(-1)=-n$，故 $S_n=-\dfrac{1}{n}$.

**答案：**$-\dfrac{1}{n}$

【总结】当 $a_n$ 和 $S_n$ 混搭在一个关系式中时，常用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$ 来处理. 若要求的是 $a_n$，则退 $n$ 相减，消去 $S_n$；若要求 $S_n$，则常用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$ 代换 $a_n$，得到数列 $\{S_n\}$ 的递推公式，再作分析.

《一数•高考数学核心方法》

**类型Ⅲ：前 $n$ 项积的处理**

【例 4】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项积 $a_1a_2\cdots a_n=n\cdot 2^n$，则 $a_n=$______.

**解析：**已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项积，由内容提要 3，可通过退 $n$ 相除求 $a_n$，但 $a_1$ 需单独计算，

因为 $a_1a_2\cdots a_n=n\cdot 2^n$，所以 $a_1=2$，当 $n\ge 2$ 时，$\begin{cases}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n=n\cdot 2^n\\ a_1a_2\cdots a_{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-1}\end{cases}$，

两式相除得 $a_n=\dfrac{n\cdot 2^n}{(n-1)\cdot 2^{n-1}}=\dfrac{2n}{n-1}$，综上所述，$a_n=\begin{cases}2,n=1\\ \dfrac{2n}{n-1},n\ge 2\end{cases}$.

**答案：**$\begin{cases}2,n=1\\ \dfrac{2n}{n-1},n\ge 2\end{cases}$

【反思】已知 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项积 $P_n$ 求 $a_n$，代 $a_n=\begin{cases}P_1,n=1\\ \dfrac{P_n}{P_{n-1}},n\ge 2\end{cases}$ 计算即可，方法与已知前 $n$ 项和 $S_n$ 求 $a_n$ 类似.

【变式】已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项积为 $P_n$，且 $2P_n=a_n^2$，证明 $\{\lg a_n\}$ 为等比数列，并求 $a_n$.

**解：**（$P_n$ 是 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项积，要证的是与 $a_n$ 有关的结论，故退 $n$ 相除消去 $P_n$）

因为 $2P_n=a_n^2$，所以当 $n\ge 2$ 时，$2P_{n-1}=a_{n-1}^2$，故 $\dfrac{2P_n}{2P_{n-1}}=\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}^2}$，即 $\dfrac{2a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}{2a_1a_2\cdots a_{n-1}}=\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}^2}$，

化简得：$a_n=a_{n-1}^2$，（要证的是 $\{\lg a_n\}$ 为等比数列，故两端取对数）

所以 $\lg a_n=\lg a_{n-1}^2=2\lg a_{n-1}$ ①，（还需验证 $\{\lg a_n\}$ 的首项非零，才能证得结论，可在条件中取 $n=1$ 求 $a_1$）

由 $2P_n=a_n^2$ 可得 $2P_1=a_1^2$，又 $P_1=a_1$，所以 $2a_1=a_1^2$，结合 $\{a_n\}$ 是正项数列可得 $a_1=2$，

所以 $\lg a_1=\lg 2\ne 0$，结合式①可得数列 $\{\lg a_n\}$ 所有项都不为 0，故 $\dfrac{\lg a_n}{\lg a_{n-1}}=2$，

所以 $\{\lg a_n\}$ 是首项为 $\lg 2$，公比为 2 的等比数列，从而 $\lg a_n=(\lg 2)\cdot 2^{n-1}=\lg 2^{2^{n-1}}$，故 $a_n=2^{2^{n-1}}$.

**【总结】**涉及数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项积 $P_n$ 的数列问题，常通过 $a_n=\dfrac{P_n}{P_{n-1}}(n\ge 2)$ 来消去 $a_n$ 或 $P_n$，其处理方法跟涉及通项与前 $n$ 项和的问题类似.

**类型Ⅳ：隐藏的前 $n$ 项和**

**【例 5】**已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$，若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots+2^{n-1}b_n=\dfrac{a_n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，求 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$.

**解：**（所给等式左侧即为数列 $\{2^{n-1}b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$，故本题仍是已知前 $n$ 项和求通项的问题）

《一数•高考数学核心方法》

设 $c_n=2^{n-1}b_n$，数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$，则 $b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots+2^{n-1}b_n=\dfrac{a_n}{2}$ 即为 $T_n=\dfrac{a_n}{2}=\dfrac{n}{2}$，

所以 $c_1=T_1=\dfrac{1}{2}$；当 $n\ge 2$ 时，$c_n=T_n-T_{n-1}=\dfrac{n}{2}-\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{1}{2}$；所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $c_n=\dfrac{1}{2}$，

从而 $2^{n-1}b_n=\dfrac{1}{2}$，故 $b_n=(\dfrac{1}{2})^n$，所以 $S_n=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=1-(\dfrac{1}{2})^n$.

**【变式】**已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，求 $a_n$.

**解：**（条件中字面上虽没有 $S_n$，但观察发现 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$ 其实是 $\{na_n\}$ 的前 $n$ 项和，故可将 $na_n$ 设为 $b_n$，转化为 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和与其通项的混搭关系来处理）

设 $b_n=na_n$，则 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2a_n$ 即为 $b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=nb_n$ ①，

（要求 $a_n$，可先求 $b_n$，故对式①退 $n$ 相减，消去和式）所以当 $n\ge 2$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=(n-1)b_{n-1}$ ②，

由①－②得：$b_n=nb_n-(n-1)b_{n-1}$，化简得：$b_n=b_{n-1}$，所以 $\{b_n\}$ 为常数列，

又 $a_1=1$，所以 $b_1=1\cdot a_1=1$，从而 $b_n=1$，即 $na_n=1$，故 $a_n=\dfrac{1}{n}$.

**【总结】**遇到例 5 及变式这种由 $a_n$ 衍生的新数列的和式结构，同样可以考虑通过退 $n$ 相减，把和式化掉.

## 强化训练

1．（2023·广东广州模拟·★）数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n=n^2+n+1$，则$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$______.

2．（2023·湖南模拟·★★★）已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且$\frac{2}{3}S_n=a_n-\frac{2}{3}n-2$.

（1）求证：数列$\{a_n+1\}$是等比数列；

（2）若$b_n=\frac{1}{a_n+1}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n<\frac{1}{6}$.

3．（2022·新高考Ⅰ卷·★★★）记$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和，已知$a_1=1$，$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

《一数•高考数学核心方法》

4．（2023·广西桂林模拟·★★★）已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，$a_1=1$，$S_n=a_{n+1}-2^n$.

（1）证明：数列$\left\{\frac{S_n}{2^n}\right\}$为等差数列；

（2）求$a_n$.

5．（2023·河北模拟改·★★★）数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\frac{a_3}{8}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$M=a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{59}$，求$M$的值.

6.（2022 •四川成都七中模拟 •★★★）已知数列$\{a_n\}$为非零数列，且满足$(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\cdots(1+\frac{1}{a_n})=(\frac{1}{2})^{n(n+1)}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{\frac{1}{a_n}+n\right\}$的前$n$项和$S_n$.

7.（2021 • 全国乙卷 • ★★★）记$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和，$b_n$为数列$\{S_n\}$的前$n$项积，已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

（1）证明：数列$\{b_n\}$为等差数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式.

《一数•高考数学核心方法》